Početní část 2 - 12.7.2021

3. Spočítáme

$$\nabla f(x,y,z) = (-3x^2 - 6xz + 4x - 2y - 3z^2 + 29, -2x + 10y + 8, -3x^2 - 6xz - 3z^2 + 27),$$

budeme tedy řešit soustavu

$$\begin{aligned} -3x^2 - 6xz + 4x - 2y - 3z^2 + 29 &= 0, \\ -2x + 10y + 8 &= 0, \\ -3x^2 - 6xz - 3z^2 + 27 &= 0. \end{aligned}$$

Odečtením třetí rovnice od první pak společně s druhou rovnicí dostáváme pro x a y lineální soustavu

$$\begin{aligned} 4x - 2y &= -2, \\ 2x - 10y &= 8. \end{aligned}$$

Ta má jediné řešení $(x, y) = (-1, -1)$. Ze třetí rovnice pak dostaneme rovnici

$$-3z^2 + 6z + 24 = 0,$$

která má řešení $z = -2$ a $z = 4$. Máme tedy dva stacionární body $(-1, -1, -2)$ a $(-1, -1, 4)$. Dále spočítáme

$$H_f(x,y,z) = \begin{pmatrix} -6x - 6z + 4 & -2 & -6x - 6z \\ -2 & 10 & 0 \\ -6x - 6z & 0 & -6x - 6z \end{pmatrix},$$

což dává

$$H(-1,-1,-2) = \begin{pmatrix} 22 & -2 & 18 \\ -2 & 10 & 0 \\ 18 & 0 & 18 \end{pmatrix},$$

což je pozitivně definitní matice a bod $(-1, -1, -2)$ je tedy lokálním minimem, a

$$H(-1,-1,4) = \begin{pmatrix} -14 & -2 & -18 \\ -2 & 10 & 0 \\ -18 & 0 & -18 \end{pmatrix},$$

což je intefinitní matice a bod $(-1, -1, 4)$ je tedy sedlovým bodem.

Protože $f(0, 0, x) = -x^3 + 27x + 5$ (což je funkce neomezená shora i zdola), nemá f globální maximum, ani globální minimum.

4. (a) Plochu pod grafem spočítáme jako

$$\int_0^1 \frac{1}{2}x^2\,dx = \left[\frac{x^3}{6}\right]_0^1 = \frac{1}{6}.$$

(b) Délku grafu spočítáme jako integrál $\int_0^1 \sqrt{1+(f'(x))^2}\,dx = \int_0^1 \sqrt{1+x^2}\,dx$, který vypočítáme například jako

$$\begin{aligned}\int_0^1 \sqrt{1+x^2}\,dx &= \left[x\sqrt{1+x^2}\right]_0^1 - \int_0^1 \frac{x^2}{\sqrt{1+x^2}}\,dx \\ &= \sqrt{2} - \int_0^1 \frac{x^2+1}{\sqrt{1+x^2}}\,dx + \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\,dx \\ &= \sqrt{2} - \int_0^1 \sqrt{1+x^2}\,dx + [\operatorname{argsinh} x]_0^1,\end{aligned}$$

což dává výslednou délku jako

$$\int_0^1 \sqrt{1+x^2}\,dx = \frac{1}{2}\left(\sqrt{2} + \operatorname{argsinh} 1\right).$$